بسم الله الرحمن الرحيم

Cours Particuliers

Classes De Terminales

Proposé par : **Dghij. Imed**

Fascicule n° 1: **bac 2016/2017**

Les Nombres complexes

dghij.imed@gmail.com

Les Nombres Complexes

Introduction

En maths, on est amené très fréquemment à résoudre des équations. La résolution d'équations s'est d'abord faite dans $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels. Puis on s'est rendu compte que cela restreignait considérablement le champ d'étude des équations. On a alors introduit de nouveaux ensembles : l'ensemble des nombres relatifs ($\mathbb{Z}$), l'ensemble des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$), l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$), ces ensembles vérifiant la relation :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

L'objectif fut donc de créer un nouvel ensemble, extension de $\mathbb{R}$, afin de pouvoir résoudre des équations qui étaient impossibles dans $\mathbb{R}$: par exemple $x^2=-1$. On appelle ce nouvel ensemble, **ensemble des nombres complexes** et sa notation est $\mathbb{C}$.

Les nombres complexes

1. Définition

Definition

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels.

L'addition sur $\mathbb{C}$ est définie par : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + (b + b')$

La multiplication sur $\mathbb{C}$ est définie par : $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + (a'b)$

Propriété

Le carré du nombre i est égal à -1 : $\mathbf{i^2 = -1}$.

On en déduit immédiatement que i n'est pas réel.

Propriété

Les propriétés de l'addition, et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous complexes z , z' , z'' , on a :

$z + z' = z' + z$ $\qquad$ $zz' = z'z$

$z + 0 = z$ $\qquad$ $z \times 1 = z$

$z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ $\qquad$ $z(z'z'') = (zz')z''$

$z(z' + z'') = zz' + zz''$

Remarque :

Attention, il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. Les symboles $<$, $>$, $\leq$ et $\geq$ n'existent donc pas.

2. Partie réelle et partie imaginaire

Théorème

Si a, a', b, b' sont réels, alors :

$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Definition

Pour tout nombre complexe z, il existe un couple unique de nombres réels (a,b) , tel que $z = a + ib$.

a est la **partie réelle** de z, notée $\mathbf{Re}(z)$.

b est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathbf{Im}(z)$.

Definition

Un nombre complexe est **réel** lorsque sa partie imaginaire est nulle.

Un nombre complexe est **imaginaire pur** lorsque sa partie réelle est nulle.

L'ensemble des imaginaires purs est noté **i** $\mathbb{R}$. On a alors :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \qquad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$$

3. Nombres complexes conjugués

Définition
Soit z un nombre complexe, noté $z = a + ib$ avec a et b réels. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $a - ib$, noté $\overline{z}$.
Toute expression complexe admet un conjugué, appelé **quantité conjuguée**.

Propriété
Pour tout nombre complexe z, le conjugué de $\overline{z}$ est z.
On a alors $\overline{\overline{z}} = z$
Propriété
Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
Il est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Propriété
Pour tous complexes z et z' de $\mathbb{C}$, on a les propriétés suivantes pour les conjugués :

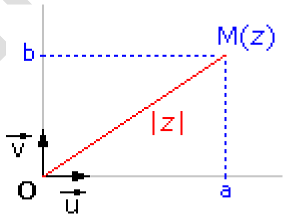
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

$$\overline{z\, z'} = \overline{z}\, \overline{z'} \qquad \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$$

$$\text{pour } z' \neq 0,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Module, argument et forme trigonométrique d'un complexe non nul
On rapporte le plan orienté à un repère orthonormé direct (O, ,). L'ensemble des vecteurs du plan est noté **V**.

1. Module d'un nombre complexe
Definition



Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, est le nombre réel positif :

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Le module de z est noté $|z|$.
Géométriquement, le module de z est la **distance** entre l'origine du repère et le point M(z) : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$

Remarque :
On déduit facilement de ce qui précède que le module d'un nombre complexe peut s'écrire :

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$$

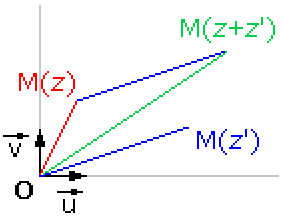
Propriété
Pour tous complexes z et z' de $\mathbb{C}$, on a les propriétés suivantes pour le module :

$$|z|^2 = z\,\overline{z} \qquad |z| = |-z| = |\overline{z}|$$

$$|zz'| = |z|\,|z'| \qquad |z^n| = |z|^n$$

$$\text{pour } z \neq 0,\ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \text{pour } z' \neq 0,\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Propriété



Pour tous complexes z et z' de $\mathbb{C}$, on a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

2. Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe **non nul** z d'image M, on appelle **argument** de z l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

On note arg(z) l'argument de z : $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Théorème

Pour tout couple de réels (ρ, θ) , il existe un unique nombre complexe z tel que $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta$. z peut alors s'écrire :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Formule

Comme on a, pour tout nombre complexe z non nul d'argument θ, $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ et $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, on en déduit :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Définition

Soit un nombre complexe z.

$z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z.

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z.

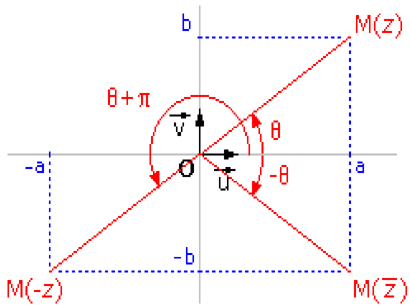
Propriété

Pour tous complexes z et z' de complexes **non nuls**, on a :

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Propriété



On a pour tout complexe z non nul d'argument θ:

$\arg(-z) = \theta + \pi$

$\arg(\bar{z}) = -\theta$

Propriété

Soient deux complexes z non nuls z et z' d'arguments respectifs θ et θ'.

On a z = z' si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\theta = \theta'$

L'exponentielle complexe : applications et intérêts

1. Notion d'exponentielle complexe

Definition

Pour tout réel θ, désigne par $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Propriété

Pour tous réels θ et θ' , on a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\, e^{i\theta'}$$

Remarque :

On a pour l'exponentielle complexe les mêmes règles de calcul que pour les exposants et l'exponentielle réelle (e^x) : $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$, etc ...

Propriété

Pour tout réel θ, on a :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Propriété

Pour tout nombre complexe non nul z, avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a :

$$z = \rho\, e^{i\theta}$$

Propriété

Pour tous réels θ et θ', on a :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2. Applications et intérêts de l'exponentielle complexe

L'exponentielle complexe permet de calculer dans $\mathbb{C}$ avec beaucoup de facilité. Elle permet aussi de retrouver certains résultats très facilement : par exemple, $e^{i\theta}\, e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ donne tout de suite $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ et ainsi de suite ...

L'interprétation géométrique du produit de deux complexes se fait par exemple très facilement avec l'exponentielle complexe alors qu'elle demande de lourds calculs pour le montrer analytiquement.

Formules d'Euler (Introduction, 1798)

On a pour tout θ réel :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre (1722)

Pour tout réel θ et tout entier relatif n , on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Remarque :

La formule de Moivre n'est autre que la transcription de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$!

L'exponentielle complexe et les formules d'Euler et de Moivre permettent de démontrer très facilement de nombreuses formules de trigonométrie. Elles sont d'ailleurs très importantes pour linéariser des expressions trigonométriques polynomiales (ce qui permet ensuite d'intégrer sans difficulté, par exemple ...)

Exercice n° 01

1°/Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = \dfrac{3(1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2}$ • $z_2 = \dfrac{2-3i}{1-2i} + \dfrac{1-2i}{2-3i}$ • $(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(5-i)\dfrac{6}{7+i}$

2°/ Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $|z+i| = |z+1|$. • $\dfrac{z+i+1}{z-i} \in IR$.
- $\dfrac{iz-1}{z+2i}$ est imaginaire pur . • $z\bar{z} + z + \bar{z} = 3$.

3°/Soit z = 5 $(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}})$.

Calculer z^2 et donner la forme trigonométrique de z^2.

4°/ Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- $z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$ • $z_2 = (1+i)[(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)]$ • $z_3 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ • $z_4 = \cos 2\theta + i\cos^2\theta$
- $z_5 = \sin\theta + i(1+\cos\theta)$; $\theta \in IR$. • $z_6 = \dfrac{1}{1+i\,\mathrm{tg}\,\theta}$; avec $\theta \in IR \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

Exercice n° 02

$(o, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan P.

1- z et z' sont deux nombres complexes de module 1. Montrer que $Z = \dfrac{(z+z')^2}{zz'} \in \Re^+$.

2- A et B sont deux points d'affixes respectives non nuls a et b.
Soit G le barycentre des points pondérés (A, |b|) et (B, |a|).

a- Donner l'affixe Z' du point G.

b- Montrer que $\dfrac{Z'^2}{ab}$ est un réel positif.

c- Déduire que (OG) est la bissectrice intérieur du secteur $[OA, OB]$

Exercice n° 03

Soient $n \in IN^*$ et $a \in C$ tel que $Re(a) \neq 0$ et $Im(a) \neq 0$. Soit z un nombre complexe.

a- Montrer que si : $(z+a)^n = (z+\bar{a})^n$ alors z est réel .

b- Montrer que si $(z+a)^n = (z-\bar{a})^n$ alors z est imaginaire pur.

Exercice n° 04

A- 1°/ Soit $z \in C$, montrer qu'on a :

- $|1-iz| = |1+iz| \Rightarrow z \in IR$; • $|z| = |1+z| \Rightarrow \Re e(z) = \dfrac{1}{2}$

2°/ Soit u = $\sqrt{2\sqrt{2}}\,(1-i)$.

a) Calculer u^2 et u^4 et déterminer le module et un argument de u^4.

b) En déduire le module et un argument de u .

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|u.z| = 8$.

B- On désigne par A et B les points d'affixes respectives (-i) et 2i

Soit f l'application du plan P\{A} dans P, qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = i\dfrac{z-2i}{z+i}$.

1- Déterminer l'ensemble des points invariants par f de P\{A}.
2- Déterminer les ensembles suivantes :
a- $E_1 = \{M(z) \in P\setminus\{A\}$ / z' est un imaginaire pur}.
b- $E_2 = \{M(z) \in P\setminus\{A\}$ / z' est un réel}.
c- E3 = (M(z) (P\{A} / | z'| = 1}.

Exercice n°05

1° Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points M, A et B d'affixes respectives :

z , 4 +2 i et –2– i . On pose pour $z \neq -2 - i$; $Z = \dfrac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$.

a) Donner une interprétation géométrique de $|Z|$ et arg Z.

b) Déterminer et construire les ensembles suivants : • E = $\{M_{(z)} / |Z| = 1\}$ • F = $\{M_{(z)} / Z \in IR\}$

• G = $\{M_{(z)} / \arg Z \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]\}$

2/ Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

• $z_1 = -2(1 + i)(1 - i\sqrt{3})$ • $z_2 = \dfrac{1 - i}{(1 + i)^3}$ • $z_3 = \cos\theta - i\sin\theta$; $(\theta \in IR)$ • $z_4 = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice n° 06

x , y et z sont trois nombres complexes de module 1 et tels que x + y + z = 1 ; xyz = 1.

Montrer que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$; en déduire x , y et z . Montrer que : $|x + y + z| = |xy + xz + yz|$.

Exercice n° 07

On considère les nombres complexes -1+i , 3(1+i) et 2 .

1- Ecrire ces nombres sous forme trigonométrique .

2- On désigne par a, b et c ces 3 nombres de façon que $|a| < |b| < |c|$;
et par A, B et C leurs images respectives dans le plan (P) muni d'un repère (o,u,v).

a- Placer les points A, B et C .

b- Montrer que le triangle obtenue est rectangle et isocèle .

3- Soit f l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : z' = 2iz + 1 –2i .
Soit A', B' et C' d'affixe respectives a', b' et c' les images par f des points A,B et C.

Déterminer a',b' et c' . Placer A', B' et C' dans le plan (P). Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? (Justifier la réponse).

Calculer $w = \dfrac{c' - b'}{c - b}$;Ecrire w sous forme trigonométrique .

En déduire la valeurs de B'C'/BC et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{B'C'}}\right)$ que peut-on dire des droites (BC) et (B'C') ?

Exercice n° 08

Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$.

1°/ a) Donner la forme trigonométrique de z_0 .

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $z_0^{\,n} + (\overline{z_0})^n = 2^{n+1}\cos(n\dfrac{\pi}{3})$

2°/ Soit $Z = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$.

a) Montrer que $Z = \sqrt{2}\, z_0 e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Donner alors la forme trigonométrique de Z.

c) En déduire les valeurs de $\cos(7\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(7\dfrac{\pi}{12})$.

Exercice n° 09

Soit z un nombre complexe non nul (z = x + iy) ; $\bar{z}$ son conjugué M l'image de z dans le plan P de repère orthonormé (o, i , j)

Montrer que $\dfrac{2z - 1}{z^2}$ **réel** $\Leftrightarrow z = \bar{z}$, **ou**, $2z\bar{z} = z + \bar{z}$

2- Déterminer puis représenter l'ensemble des points M tels que $\dfrac{2\mathbf{z}-1}{\mathbf{z}^2}$ soit réel.

3- On suppose que $2\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}$. Calculer $|z|$ et $\dfrac{2\mathbf{z}-1}{\mathbf{z}^2}$ en fonction d'un argument θ de z.

Exercice n° 10

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (o,i,j), on considère l'application f de P\{O}dans P qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z^2-9}{2z}$.

On désigne par A et B les d'affixes respectives (3i) et (-3i).

1-a) Déterminer les points invariants par f.

b) Montrer que : z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ M' , A et B sont alignés .

c) Montrer que si $z \neq 3i$ alors on a l'égalité $\dfrac{z'+3i}{z'-3i} = \left(\dfrac{z+3i}{z-3i}\right)^2$.

d) Justifier que : $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$

e) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels z' est imaginaire pur.

2- Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2 affixes respectives des points M_1 et M_2 antécédents du point M' d'affixe ($3\sin\theta$) par f.

b) Montrer que les points A, B, M_1 et M_2 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Préciser la nature du triangle BM_1M_2.

Exercice n° 11

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$,on pose $z' = \dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$.soient A,B,Met M' les points d'affixes 1,-1,z et z'.

1°)

a) comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$. En déduire $|z'|$.

b) en déduire l'ensemble des points M' .

2°) on pose : $K = \dfrac{z'+1}{\bar{z}-1}$

Montrer que $K = \dfrac{z+\bar{z}-2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$. en déduire que k est un réel .

3°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

4°) En déduire une construction du point M' connaissant M .

Exercice n° 12 :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé (o,i,j) on considère les points A ,B ,C et D d'affixes respectives –2i, 4 - 2i, 4 + 2i et 1

1°)

a) placer les points A ,B ,C et D sur une figure (unité 2cm).

b) Préciser la nature du triangle ABC.

2°) on désigne par f l'application qui à tout point M d'affixe z et distinct de A associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-4+2i}{z+2i}$,

on pose z= x+iy .

a) déterminer la forme cartésienne de z' .

b) déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'|=1$.

c) déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel .

d) déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur .

3°)

a) montrer que (z'-1)(z+2i)=-4

b) en déduire que DM'.AM=4 et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{DM'}\right) + \left(\vec{i}; \overrightarrow{AM}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

c) Déterminer l'image du cercle (C) de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$ par f .

d) Déterminer l'image par f de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ vérifiant (î, $\vec{u}$) ≡ $\frac{\pi}{8}[2\pi]$.

Exercice n° 13:

Soit (o,u,v) un RON direct du plan complexe P .soient A, I, et B les points d'affixes respectives 1,2et3. on désigne par P'=P\{I} et par f l'application F :P'→ P', M(z) → M'(z) tels que z'=$\frac{2z-3}{z-2}$.

1°) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2°) Montrer que f est bijective et définief^{-1} réciproque de f .
3°) Exprimer z'-2 en fonction de z .
4°)

a) déduire l'image du cercle C de centre I et de rayon r par f.

b) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{IM'}) \equiv -(\vec{u},\overrightarrow{IM})[2\pi]$. Interpréter géométriquement ce résultat .

c) Soit z $\in C$ tels que z-2=$e^{i\theta}$ .déduire une construction du point M' image de M(z) par f .

5°) a- on suppose que M ∈P/{A,B}. Montrer que $\frac{1-z'}{3-z'} = -\frac{1-z}{3-z}$

b- interpréter géométriquement ce résultat.

c- Montrer que si M appartient à la médiatrice de [AB], il en est de même pour M' .

Exercice n° 14:

(O,Ū,V) 1 RON direct du plan complexe P. soit f : P→P, M(z) → (z') tel que z' = (1+i) z +2.
1° / déterminer l'ensemble (E)= {M (z), |z'|=√2 }.

2°/ on suppose z = $\sqrt{2}\ e^{i\theta}$,θ ∈[o, $\frac{\pi}{2}$]. Donner la forme trigonométrique de z' .

3°) montrer que f possède un seul point invariant noté A .

4°) on suppose Z ≠2i. Montrer que $\frac{z'-z}{2i-z} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ en déduire la nature de triangle AMM' est une construction M' .

5°) soit l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.∀M∈P , on pose M_1 = h(M) avec M1 (z_1)et M(z).

a) exprimer z_1 en fonction de z

b) soit g = f∘h . Montrer que g est une rotation que l'on caractérisera.

c) en déduire que f est la composé de 2 applications que l'on précisera.

EXERCICE n° 15

Pour tout point M du plan complexe d'affixe z ≠ - i, on note M' le point d'affixe z' = $\frac{2\,i}{z - i}$.

1°/ Écrire z' sous forme exponentielle pour z = 1 puis pour z = $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2°/ Déterminer l'ensemble E = { $M_{(z)}$ / z' est réel }.

3°/ Montrer que $|\,z'\,| = \frac{2}{|\,z+i\,|}$. En déduire que si M appartient au cercle de centre $A_{(-i)}$ et de rayon 2 alors M' appartient a un cercle fixe que l'on précisera.

4°/ Trouver une relation entre arg (z') et arg (z + i). En déduire que (AM) ⊥ (OM).

EXERCICE n° 16

1°/ Soit u = $e^{i\theta}$ avec θ ∈ $]0\,,2\pi[$ .Déterminer le module et un argument du nombre complexe z tel que : u = $\frac{z-i}{z+i}$.

2°/ Soit z = $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1}$ .Montrer que z = $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\,\text{cotg}\,\frac{\theta}{2}$.

3°/ Soit θ∈ $]-\pi,\pi[$ et z = $\frac{1}{2}$ (1+ $e^{i\theta}$) ².

a) Calculer $(1+e^{i\theta})e^{i\frac{\theta}{2}}$, en déduire que $\arg(1+e^{i\theta}) \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]$.

b) Calculer alors $|z|$ et arg z.

EXERCICE n° 17

Soit a un nombre complexe.

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $(z-a).(\bar{z}-\bar{a}) = a\bar{a}$.

EXERCICE n° 18

1°/ Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donner la forme exponentielle de j^2, j^3 et 1 + j.

2°/ Soit les nombres complexes a,b et c tels que : $a + b\,j + c\,j^2 = 0$. Montrer que : $|a-b| = |b-c| = |c-a|$.

3°/ Déterminer la forme exponentielle de $(1+j)^2$ et $(1+j)^3$.

4°/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (1+j)^k$.

a) Montrer que $S_n = e^{i\frac{\pi}{3}} - i\,e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

b) Écrire S_n sous forme exponentielle.

EXERCICE n° 19

Soit $z \in C$. Montrer que $(\bar{z}+z)^2 - \overline{(\bar{z}-z)^2}$ est réel.

EXERCICE N° 20

Soit $z \in C \setminus \{3\}$.On pose $Z = \frac{\overline{z^2}}{\bar{z}-3}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M (z) tel que Z soit réel.

EXERCICE N° 21

On pose $Z = \frac{iz-3}{z+2i}$. Déterminer l'ensemble des points M (z) tel que :

a) Z soit réel.
b) Z soit imaginaire pur.
c) $|Z| = 1$.
d) $Z \in IR_+$.
e) $|Z| = 2$.

EXERCICE N° 22

Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2i\bar{z} = 0$. Soient O, A, B, C les images dans le plan complexe muni d'un RON $(O,\vec{u},\vec{v})$ des solutions obtenus. Montrer que ABC est équilatérale.

EXERCICE N° 23

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(z) = z + j^2\bar{z}$.

1) Vérifier que $|j| = 1$ et $j^2 = \bar{j}$ puis montrer que $j^3 = 1$.
2) En déduire les valeurs de j^n avec $n \in IN$.
3) Montrer que $\forall z \in C$ $|f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,l(jz^2)$.
4) Montrer que $[j^2 f(z)] \in IR$.
5) Définir l'application $f \circ f(z)$ puis $f \circ f \circ f(z)$. En déduire $f^n(z) = \underbrace{f \circ f \circ f \ldots\ldots \circ f}_{nfois}, n \in IN^*$.

EXERCICE N° 24

Dans le plan complexe rapporté à un ROND $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit M le point d'affixe z et N le point d'affixe f (z) avec $f(z)=\frac{3+4i}{6}z+\frac{5}{6}\bar{z}$.

1) Déterminer l'ensemble $D=\{M(z);\ f(z)=z\}$.

2) a) Exprimé à l'aide de z et $\bar{z}$ le nombre complexe $a=\frac{f(z)-z}{1+2i}$.

b) En déduire que $a\in IR$.

c) En déduire que N appartient à la droite Δ_M passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}+2\vec{v}$.

3) a) Montrer que $f\circ f(z)=f(z), \forall z\in C$.

b) Montrer que le point N est le point d'intersection de D et Δ_M.

EXERCICE N° 25

Le plan complexe est rapporté à un ROND $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A (2i), B (6 + 2i) et $f:P\to P$

$$M(z)\mapsto M'(z')\text{ tel que } z'=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z+1+i.$$

1) On pose $z=2e^{i\theta}$ avec $\theta\in[\pi,2\pi]$. Mettre z' sous la forme trigonométrique.
2) Montrer que A est l'unique point invariant par f.
3) Dans la suite on pose M $\neq$ A.

a) Montrer que $AM'=\frac{1}{\sqrt{2}}AM$ et $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Montrer que $\frac{z'-2i}{z'-z}$ est imaginaire pur puis interpréter ce résultat.

c) En déduire une construction géométrique du point B'= f (B).

EXERCICE N° 26

Dans le plan complexe rapporté à un ROND $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A (2i), B (2).

1) Déterminer l'ensemble $E=\{z\in C; |z-2i|=|z-2|\}$.

2) Montrer que $z\in E \Rightarrow \text{Arg}(z-2i)+Arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) En déduire que $z\in E\Rightarrow z=i\bar{z}$.

4) on pose pour tout $z\neq 2$ $z'=\frac{z-2i}{\bar{z}-2}$ et $z\neq 2i$.

a) Vérifier que $\text{Arg } z'\equiv\text{Arg}(z-2i)+Arg(z-2)[2\pi]$.

b) En déduire que si M (z) $\in$ méd[AB] alors z' = i.

c) Déterminer l'ensemble $F=\{M(z); z'\in iIR^*\}$

5) Soit $(E):\bar{z}.(z-2i)^3=z.(\bar{z}-2)^3$.

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors z $\in$ E.

b) En déduire les solutions de (E).

EXERCICE N° 27

Dans le plan complexe rapporté à un ROND $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A (1), A' (-1), B (i) et B' (-i) et à tout point M (z) de P \ {A, A', B, B'} on associe les points $M_1 (z_1)$ et $M_2 (z_2)$ tel que les triangles BMM_1 et AMM_2 soit isocèles et rectangles avec $(\widehat{\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{M_2B},\overrightarrow{M_2M}})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Montrer que $z_1=\frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2=\frac{1-i}{2}(z+i)$.

2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M (z) pour les quels $OM_1 = OM_2$.

3) Montrer que $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$.

4) Déterminer et représenter l'ensemble des points M (z) pour les quels $OM_1 = M_1M_2$.

5) En déduire les points M pour les quels OM_1M_2 est un triangle équilatérale.

6) Soit f : P $\longrightarrow$ P M (z) $\longmapsto$ M_2 (z_2)

a) Déterminer les points invariants par f.

b) Monter que $f(M) = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} AM_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} AM \\ (\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{AM_2}}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

EXERCICE N° 28

Dans le plan complexe rapporté à un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A (-i), B (i) et C (1 + i).

A tout point M (z) on associe le point M' (z') tel que $z' = \dfrac{iz}{z+i}$.

1) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$D = \{M(z) \in P; |z'| = 1\}$; $\zeta = \{M(z) \in P; z' \in iIR\}$ et $\Delta = \{M(z) \in P; z' \in IR\}$.

2) Montrer que si M $\neq$ A et M $\neq$ O alors $\left(\overrightarrow{MA}, \widehat{\overrightarrow{MO}}\right) \equiv \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM'}}\right) - \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) En déduire l'ensemble décrit par M lorsque M' décrit la droite (OC).

4) Quelle est la nature du triangle MAO lorsque OBM' est équilatérale direct.

EXERCICE N° 29

Le plan est mené d'un R.O.N $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M (z) avec $z \neq 0$, on associe le point M' (z') tel que : $z' = -\dfrac{1}{\bar{z}}$.

A. On note par α un argument de z et α' un argument de z'.

1) Déterminer la relation entre α et α'.
2) En déduire que les points O, M et M' sont alignées.
3) Démontrer que : $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

B. On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

On désigne par ζ le cercle de centre A contenant le point O, et par ζ* le cercle ζ privé de O.

1) On suppose dans cette question que le point M appartient à ζ*.
   a) Justifier l'égalité : $|z-1| = 1$.
   b) Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   c) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M'à partir du point M.
2) Le point M étant un point du plan complexe d'affixe z non réel. On nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.
   a) Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $\bar{z}$.
   b) Exprimer alors l'argument de $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \widehat{\overrightarrow{M_1B}})$.
   c) Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \widehat{\overrightarrow{M_1B}})$ et $(\overrightarrow{MA}, \widehat{\overrightarrow{MB}})$.
   d) Démontrer que M'appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

Exercice 30

Le plan complexe P est muni d'un R.O.N.D (o,i,j). On considère la suite des points M_n d'affixes respectives z_n définies par:

$$\begin{cases} z_0 = 8 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n, \forall n \in IN \end{cases}$$

1- Mettre $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme trigonométrique.

2-a- Placer dans le plan P les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3

b- Calculer z_n en fonction de n. En déduire les valeurs de n pour lesquelles M_n appartient à la droite des abscisses.

3-a- Pour tout entier naturel n, calculer les quotient $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$

b- En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3}\, OM_{n+1}$.

Exercice 31

A tout point M du plan complexe d' affixe $z \neq e^{i\frac{\pi}{6}}$ on associe le point M ' d'affixe z' tel que $z' = f(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}z-1}{z-e^{i\frac{\pi}{6}}}$.

1°/ a) Montrer que : $ie^{i\frac{\pi}{6}}-1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe : $i - e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) En déduire que $f(i) = \sqrt{3}$.

2°/ Montrer que si $|z| = 1$ alors z' est réel.

3°/ Dans cette question, on suppose que $|z| = 1$, $z \neq e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a) Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe : $-\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}$.

b) Calculer $(z' - e^{i\frac{\pi}{6}})$.

c) Montrer que : $(z - e^{i\frac{\pi}{6}})(\bar{z} + e^{i\frac{\pi}{6}}) = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}(z - \bar{z})$.

d) Démontrer que le nombre complexe : $\dfrac{\bar{z}-e^{i\frac{\pi}{6}}}{z'-e^{i\frac{\pi}{6}}}$ est réel .

4°/ Prouver que : $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ .Résoudre , dans C, l'équation f (z) = z .

EXERCICE 32

Soit $n \in IN$ et (E) l'équation : $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$.

1°/Montrer que les solutions de (E) sont de la forme : $z_k = \cot g\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$; $k \in \{1,2,..,n\}$

2°/ a) Soit $x \in IR^*_+$. Montrer que l'équation : $(\sqrt{x}+i)^{2n+1} = (\sqrt{x}-i)^{2n+1}$ peut s'écrire sous la forme : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ C_{2n+1}^{2k+1}\, x^{n-k} = 0$:

(1)

b) En déduire que si z_k est une solution de (E) alors z_k^2 est solution de (1)

c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\cot g^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{n(2n-1)}{3}$. Calculer alors $T_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

3°/a) En utilisant que : sin t < t < tg t ; pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$; Montrer que : $\cot g^2 t < \dfrac{1}{t^2} < \dfrac{1}{\sin^2 t}$

b) Trouver alors un encadrement de la somme : $L_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$.

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{\pi^2}{6}$

EXERCICE 33:

P est le plan complexe rapporté a un RON direct (o,i,j), θ est un réel de $\left]-\pi,\pi\right[$ et M le point du P d'affixe

z= $\frac{1}{1+\cos(\theta)}(\cos\theta + i\sin\theta)$

1 – Montrer que pour tout θ de $\left]-\pi,\pi\right[$, $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} tg\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}tg^2\frac{\theta}{2}$ en déduire que lorsque θ varie dans $\left]-\pi,\pi\right[$ le point M décrit une courbe Γ dont on déterminera une équation

2 – Soit f l'application de P \{O} dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' = $\frac{1}{\bar{z}}$

a- Exprimé l'affixe z' de M' = f(M) en fonction de θ et l'écrire sous forme exponentielle

b- Soit m' le point de P d'affixe $\alpha = \cos\theta\,(\cos\theta + i\sin\theta)$. Montrer que m' appartient au cercle (C) de centre I d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

c – Montrer que les points O, M, M' et m' sont alignes

d – Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{m'M'}$ puis la distance m'M'. Expliquer comment on peut construire M' à partir du point m' de (C).

EXERCICE 34:

On pose Z = $\frac{1+z}{i-z}$.

1) déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tells que Z est réel.
2) déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tells que Z est imaginaire pur.
3) déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tells que Z=1.
4) déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tells que |Z|=1.
5) déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tells que |Z|=2.

Exercice 35:

Dans le plan complexe rapporté a un repère ortho normal (o,u,v), on considère la suite des points M_n de coordonnées (x_n,y_n) définie par récurrence de la manière suivante : le point M_o de coordonnées (x_o,y_o)est donné, et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

1- Démontrer par récurrence que, si M_o est le point $\Omega(1,0)$, pour tout entier naturel n, $M_n = M_o$.
2- Déterminer les points M_1 , M_2 et M_3 en prenant pour M_o le point de coordonnées (5,4).
   Placer les points M_o, M_1 , M_2 et M_3. Montrer que les droites (M_oM_1) et (M_2M_3) sont parallèles.
   Montrer que les droites (M_oM_2) et (M_1M_3) sont perpendiculaires.
3- On se propose de généraliser les résultat précédents
   On suppose que le point M_o fixé est distinct du point $\Omega(1,0)$.
   soit $z_n = x_n + y_n$, l'affixe du point M_n.
   a- Montrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{1}{2} iz_n + 1 - \frac{1}{2} i$.
   On pose $Z_n = z_n - 1$. Démontrer que pour tout entier naturel n : $Z_{n+1} = \frac{1}{2} i Z_n$
   b- On note d_n la distance de Ω à M_n : $d_n = \Omega M_n$. Calculer d_n en fonction de n et de d_o.
   c- Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M_n};\overrightarrow{\Omega M_{n+1}}\right)$. Que peut-on dire des droites (M_nM_{n+2}) et $(M_{n+1}M_{n+3})$?

a- Montrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} - z_n = Z_{n+1} - Z_n$ et $Z_{n+3} - Z_{n+2} = -\frac{1}{4}(Z_{n+1} - Z_n)$

Exercice 36:

Soit A (2i) et f : P\ {A} $\to$ P\ {A} / M(Z) $\to$M' (Z') /z' = $\frac{2iz-5}{z-2i}$

a) Trouver les points invariants par f.
b) Montrer que f est bijective ; trouver f^{-1}

c) Monter que si $z \neq 2i$ on a : $|z'-2i|\,|z-2i| = 9$, En déduire l'image par f du cercle C de centre A et de rayon r .

EXERCICE 37 :

On considère dans C l'équation (E) : $(i-1)z^2 - 2i(m+1)z + (1+i)(m^2+1) = 0$. Où m est un paramètre complexe.

1°/Résoudre dans C l'équation (E). On désigne par z_1 et z_2 les solution de (E).

2°/Déterminer les formes trigonométriques des nombres complexes m pour lesquels (E) admettent deux racines inverses l'une de l'autre.

3°/Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives :

$(1-i)$, z_1 et z_2. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

EXERCICE 38 :

Soit dans C l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\cos\theta\,\sin\theta = 0$. où $\theta \in]0,\pi[$.

1°/a) Vérifier que : $1 - 2\sin^2\theta + i\sin 2\theta = e^{2i\theta}$.

b) Résoudre dans C l'équation (E) . On note z' et z'' les solutions de (E).

2°/a) Ecrire z' et z'' sous formes trigonométriques.

b) Soit $Z = \frac{z'}{z''}$. Déterminer la forme cartésienne de Z.

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z quand θ vari sur $]0,\pi[$.

EXERCICE 39 :

1°/ Montrer que pour tout réel θ on a : $e^{i\theta} - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

2°/ a) Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2 - (2\cos\theta + i)z + 1 - \sin\theta + i\cos\theta = 0$; où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$

b) Ecrire les solutions de (E) sous formes exponentielles.

3°/a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_2 = \cos\theta + i(1-\sin\theta)$. Déterminer l'ensemble des points M_2 lorsque θ vari dans $[0, \frac{\pi}{2}[$

b) Soit M le symétrique de M_1 par rapport à (Ox). Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M}$ en fonction de θ.

c) En Déduire que M est l'image de M_1 par une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

4°/Déterminer la valeur de θ pour laquelle le triangle OM_1M_2 est rectangle en M_1.

EXERCICE 40 :

1°/ Vérifier que pour tout $\theta \in$ IR on a : $1 + \sin 2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)^2$.

2°/Soit (E_θ) l'équation complexe : $(1+i)z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)z + 1 - i = 0$; avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, z' et z'' sont les solutions de (E_θ).

a) Sans calculer z' et z'', montrer que $z'z'' = -i$.

Déduire une relation entre argz' et arg z''.

b) Résoudre dans C l'équation (E_θ) et écrire z' et z'' sous formes exponentielles.

c) Préciser la valeur de pour laquelle z' = z'' et calculer z' sous forme algébrique.

3°/ On note M' et M'' les points images respectivement de z' et de z'' dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Vérifier que : $z'' = -i\,\overline{z'}$. En déduire que M'' est l'image de M' par une symétrie orthogonale d'axe D que l'on précisera.

b) Déterminer les réels θ pour lesquels OM'M'' est un triangle équilatéral.

Exercice 41 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (o, u, v); soit A le point d'affixe 1 ,a tout point M d'affixe Z tel que Z distinct de 1, on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \dfrac{\overline{z}+iz}{z-1}$.

1°) Déterminer l'ensemble D des points M de P/ {A} tel que Z' =0

2°) Déterminer l'ensemble Γ des points M de P /{A} tel que|z'|=√2

3°) a) Montrer que (z'-i) (z-1) = $\overline{z-i}$.

b) Soit B le point d'affixe i. En déduire que pour M ≠ B et M' ≠ B on a : BM'.AM = BM et

$$\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{BM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM};\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\vec{u}}\right)[2\pi]$$

a- Soit M un point du centre C de centre A et de rayon 2 tel que (u, BM) ≡ o (2π) construire le point M'.

Exercice 42:

Le plan complexe étant rapporté au RON D (O,u ;v), on donne les points A(-1) et B(-1).

A tout point M(z), on associe le point M'(z') tel que z'= $\dfrac{i-iz}{1+z}$

1°) montrer que : |z'|=1 ⇔ z imaginaire pur.

2°) on suppose M ≠ A et M ≠ B :

a) Montrer que arg z' ≡- $\dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$ (2M)

b) En déduire l'ensemble des points M(z) tel que z' soit imaginaire pur Im(z')<0.

3°) Soit dans C l'équation E : (i-iz).²(1-i) = (1+z)².(1+i) et soit z une solution de E

a) Montrer que z est imaginaire pur

b) on pose z = i.tgα avec $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ .Montrer que $\dfrac{i-iz}{1+z} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$.

c/ Résoudre alors l'équation E (on donne tg Π/8 =√2-1).

Exercice 43:

Le plan complexe étant rapporté au RON D (O,u ;v), on donne les points A(-1) et B(-1).

A tout point M(z), on associe le point M'(z') tel que z'= $\dfrac{i-iz}{1+z}$

1°) montrer que : |z'|=1 ⇔ z imaginaire pur.

2°) on suppose M ≠ A et M ≠ B :

a) Montrer que arg z' ≡- $\dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$ (2M)

b) En déduire l'ensemble des points M(z) tel que z' soit imaginaire pur Im(z')<0.

3°) Soit dans C l'équation E : (i-iz).²(1-i) = (1+z)².(1+i) et soit z une solution de E

a) Montrer que z est imaginaire pur

b) on pose z = i.tgα avec $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ .Montrer que $\dfrac{i-iz}{1+z} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$.

c/ Résoudre alors l'équation E (on donne tg Π/8 =√2-1).

EXERCICE 44:

Soit z un nombre complexe tq z=[ρ,θ]. On donne Z= z - (cos$\dfrac{\pi}{3}$ +i sin$\dfrac{\pi}{3}$) $\overline{z}$.

Déterminer le module et l'argument Z.

EXERCICE 45:

Soit $\alpha \in$R tq 0 ≤ α ≤ π/2 on considère le nombre complexe z = $\dfrac{\cos\alpha + i.\sin\alpha}{\cos\alpha - i.\sin\alpha}$

1/ déterminer le module et l'argument de z.

2/ calculer le nombre complexe $\dfrac{z-i}{z+i}$ en fonction de α(vérifie que sa partie réelle est nulle).

EXERCICE 46:

1°/Résoudre dans C l'équation : $(\sin^2\theta)z^2 -(\sin 2\theta)z + 1+\cos^2\theta = 0$ où θ est un réel de $]0,\pi[$, on désigne par z' et z'' les solutions de cette équation.

2°/ Vérifier que $z'^2 + z''^2$ est indépendante de θ.

3°/ Soient M' et M'' les points du plan complexe d'affixes respectives z' et z''.

Déterminer θ pour que l'on a : $\theta \in]\frac{\pi}{2},\pi[$ et $\|\overrightarrow{M'M''}\| = 2\sqrt{2}$.

Exercice 47

1- Soit le nombre complexe z = $\cos\alpha + i\sin\alpha$ où α désigne un nombre réel

a- Ecrire sous forme trigonométrique $\frac{1}{z}$; z^n et $\frac{1}{z^n}$. En déduire $z-\frac{1}{z}$ et $z^n - \frac{1}{z^n}$

en fonction de $\sin\alpha$ et $\sin(n\alpha)$.

b- Calculer de deux façons $(z - \frac{1}{z})^5$ en fonction de α. En déduire la linéarisation de $\sin^5\alpha$

c- Résoudre dans IR l'équation : $16\sin^5(x) = 10\sin(x) - 6\sin(3x)$.

2- a- Soit $Z = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Calculer z^5 et en déduire que : $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$

b- Déduire du a) les valeurs de $X = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

$Y = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

3 – Soit x un nombre réel et z le nombre complexe cos(x) + i.sin(x)

a- Exprimer cos(x) et sin(x) en fonction de z et $\frac{1}{z}$.

b- Montrer que, pour que le nombre réel x vérifie l'égalité: $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$ (1) il faut et il suffit que z soit racine d'une équation du second degré (E) que l'on écrira.

c- Résoudre l'équation (E). Ecrire les solutions sous forme trigonométrique et en déduire les solutions de l'équation (1) .

EXERCICE 48:

On considère la fonction $f : C \to C$

$Z \to f(z)$ tq : $f(z) = 2z^3-(3+2i\sin 2\theta)z^2+(1+2\sin 2\theta)z - \frac{i}{2}\sin 2\theta$ tels que $\theta \in [0,\pi/2[$.

1/a- montrer qu'il existe un unique réel z_0 tels que pour tout réel θ de$]0, \pi/2[$on a $f(z_0) = 0$

a- achever la résolution, dans C, de l'équation f (z)=0. on désigne par z_1 et z_2, les solutions autre que z_0 de l'équation f (z)=0

b- écrire z_0 et z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

2/ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j).

On considère les points A, M_1, M_2 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2.

Déterminer s'il existe un réel θ de$]0,\pi/2[$pour que le triangle AM_1M_2 soit rectangle et isocèle en A.

3/ soit $I = M_1 * M_2$ déterminer l'ensemble des points I, lorsque le réel θ varie.

EXERCICE 49:

1/ Soit $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

On pose $\alpha = z_0+z_0^4$ et $\beta = z_0^2+z_0^3$

a- montrer que $1+ z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation : (1) $x^2+ x - 1 = 0$.

b- Déterminer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

c- Résoudre l'équation (1) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2/ on désigne par A_0,A_1,A_2,A_3,A_4 les points d'affixes respectives $1,z_0,z_0^2,z_0^3,z_0^4$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o,u,v) .

a- soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe (o, u), montrer que $OH = \cos\frac{2\pi}{5}$

b- Soit © le cercle de centre Ω d'affixe -1/2 passant par B d'affixe i .ce cercle coupe l'axe (o, u) en Met N (M étant le point d'abscisse positive).
Montrer que OM = α, ON= β et que H= O $*$ M .

c- en déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre o et un sommet A_0.

3/ à tout nombre complexe $u \neq -1$, on associe $z=\frac{u-1}{u+1}$, calculer u en fonction de z et trouver l'ensemble des points d'affixe u tels que $|z|=1$.

EXERCICE 50:

1/a- Montrer que les solutions de l'équation $|z+i|=|z-i|$, $z \in C$, son tous de nombres réels .
b- En déduire que toute solution de (E) : $(z+i)^3=i\,(z-i)^3, z \in C$ peut s'écrire $z= tg\alpha$ avec α réel $-\pi/2<\alpha<\pi/2$
b- Résoudre (E)
2/ déduire une seconde méthode des résolutions de (E) du fait que (-1) est solution de (E).
3/ déduire alors une valeur de $tg(\pi/12)$.

EXERCICE 51 :

1°/ Soit θ un réel de $\left]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation :

(E) : $z^2 - [\,1 + i\,(\sin\theta + tg\,\theta)]\,z + \sin\theta\,(i - tg\,\theta) = 0$.

a) Montrer que b = i sin θ est une solution de (E). Déterminer l'autre solution a.

b) Déterminer le module et un argument de a.

2°/Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application : f : P $\mapsto$ P

$M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$ tel que f(z) = a z + b .

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Déterminer θ pour que f soit une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 52

1/ écrire sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $z^5=1$.

2/ soit $\theta \in]-\pi,\pi[$, exprimer en fonction de θ la solution de l'équation : $\frac{1-iz}{1+iz} = \cos\theta + i.\sin\theta$.

3/ résoudre dans C : $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^5 = 1$.

4/ développer et ordonner l'expression $(1-iz)^5-(1+iz)^5$
Résoudre dans R : $(1-iz)^5-(1+iz)^5=0$

5/ déduire des questions précédents la valeur de $tg(\pi/5)$.

Exercice 53:

On considère dans C l'équation : (E): $z^2 -(1-i)(m+1)z - i(m^2+1)=0$ où $m \in C$.

1°) Déterminer les valeurs de m pour que i soit une solution de (E), puis déterminer l'autre solution.

2°) a) Résoudre dans C l'équation (E) ; soit z' et z'' les solutions
b) ou pose $m= i\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in]o,2\pi[$; Déterminer le module et un argument de z' et z''.

3°) Dans le plan complexe P muni d'un repère ON (o,u,v) on considère les points A ; M' et M'' d'affixes respectives 2i ; m-i et 1-mi ,déterminer la valeurs de m pour laquelle on a :

$$\begin{cases} AM'' = \sqrt{2}AM' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

Exercice 54:

a) soit $\alpha \in \Re$ Résoudre dans C : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$
b) résoudre dans : $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$ où $n \in IN^*$
c) on pose $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$.

1/ montrer que $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + 1\right]$

2/ calculer $P_\alpha(1)$. Déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}}$.

3/ soit $\alpha \in]0, \pi[$ .On pose $H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

Montrer que $2^{n-1}H_n(\alpha) = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n},}$.

En calculons la limite lorsque α tend vers 0 de $H_n(\alpha)$ déduire que : $\forall$ n ≥ 2 on a : $\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}......\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 55:

Le plan complexe est rapporte à 1 RON direct (o, u, v).

1° Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 2\sin^2\alpha - 2i\sin\alpha.\cos\alpha = 0$ où $\alpha \in]0, \Pi[$.

On désignera par z' la solution de partie imaginaire positive et par z'' l'autre solution.

2°/ Montrer que $z' = 2\cos\frac{\alpha}{2}\ e^{i\alpha/2}$ et $z'' = -2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

3°/ Soient M' et M'' les points d'affixes respectives z'et z''

a/ Calculer $\frac{z''}{z'}$. Déduire la nature du triangle OM'M''.

b/ Déterminer α pour que OM'M'' soit isocèle.

4°/ Déterminer l'ensemble des points M' (z') lorsque α varie dans $]0, \Pi[$.

Exercice 56:

Le plan complexe est rapporté à un ROND (o,ū, v).unité 2cm .

On considère dans C l'équation(e) : $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

1°/ a/montre que l'équation (e) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

b/déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2($z_1$est celle dont la partie imaginaire est négative).

2°/soit $z_3=2i$ .on désigne par A,B,C et D les point d'affixes respectives z_0 , z_1 , z_2 et z_3.montrer que ABCD est un carré .

3°/on désigne par I le centre du carré ABCD et par J le milieu du côté [BC].Montrer que les points O ,I,J et B sont cocycliques .

4°/Soit r la rotation de centre A et transformant B en D.

a/ on désigne par M le point d'affixe z et par M' le point d'affixe z' image de M par r déterminer et construire l'ensemble des points M' tels que $|z'-2i| = 2$.

b/ soit K le point d'affixe 3+3i . on pose C'=r(C) et K'=r(K).
Monter que les points D,C 'et K' sont alignés .

EXERCICE 57:

Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^3 - (8+3i)z^2 + (19+16i)z - 12 - 21i$.

1.a- Vérifier que P(z) = 0 admet une solution réel.

b- Résoudre dans C l'équation P(z) = 0 on désigne par z_1 et z_2 les deux autres racines non nulles et on suppose que $|z_1| < |z_2|$.

2- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (o,i,j), on considère les points M_o , M_1 et M_2 d'affixes respectives 3 , z_1 et z_2 .

a- Montrer que le triangle $M_oM_1M_2$ est rectangle et isocèle.

b- On considère l'application f de C dans C définie f(z) = az + b avec a et b sont deux nombres complexes . Déterminer a et b pour f(3) = 3 et $f(z_1) = z_2$

3- On considère l'application S du plan complexe dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe f(z) .

Reconnaître l'application S et donner ces éléments caractéristiques (**Juin 1992**)

EXERCICE 58:

Soit $U^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

1/ vérifier que $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$ est solution de E.

2/ résoudre alors E et donner ses solutions sous leurs formes trigonométriques.

3/ soit θ un réel de $]0,2\pi[$. Ecrire $Z = \dfrac{1}{1-\cos(\theta)-i.\sin(\theta)}$ sous sa forme cartésienne.

4/ résoudre dans C l'équation : $(2z-1)^3=4\sqrt{2}(-1+i)z^3$.

Exercice 59 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o,u,v) .

1/ soit U un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

Résoudre dans C l'équation : $z^2-(1+u+\bar{u}).z+1+\bar{u}=0$.

2/ soient A et B deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 solutions de E tel que $|z_1|=1$.
Déterminer θ pour que le triangle OAB est rectangle en O .

3/ déterminer l'ensemble des points I milieu d segment [AB] quant θ varie dans $[0;\dfrac{\pi}{2}]$.

4/ soit le point C symétrique du point A par rapport à la droite $(o,\bar{u})$.

- b- montrer que la droite (BC) garde une direction fixe à préciser lorsque θ varie.
- c- Déduire l'affixe du point D pour que ABCD soit rectangle.

EXERCICE 60:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o,u,v).

1/ résoudre dans C l'équation (1) $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ on donnera le module et un argument de chaque solution.

2/ résoudre dans C l'équation (2) : $\dfrac{z-2}{z-1}=i$ on donnera la solution sous la forme algébrique.

3/ soit M,A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2 . On suppose que M est distinct des points A et B .

- b- interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.
- c- retrouver géométriquement la solution de (2).

4/a- montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans C : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n=i$ ou' n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

b- résoudre dans C l'équation (3) : $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2=i$, on cherchera les solutions sous forme algébrique .

EXERCICE 61:

1) résoudre dans C l'équation : $(1+i)z^2-2z+1-i=0$
2) soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$. résoudre dans C l'équation : $mz^2-2z+\bar{m}=0$.
3) on pose $m=\sqrt{2}e^{i\alpha}$ ou α est un réel .
   - a- montrer que les racines z' et z'' de E s'écrivent sous forme $z'=e^{i(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$ et $z''=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$
   - b- dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (o,u,v) , on désigne par M' et M'' les points d'affixes z' et z'' et M d'affixe z'+z'' . montrer que z'/z'' = i . en déduire que $(OM')\perp(OM'')$.
   - c- Montrer que le quadrilatère OM'MM'' est un carré .

EXERCICE 62

Le nombre réel α appartient a l'intervalle $[0,\dfrac{\pi}{2}[$. On désigne par a le nombre complexes $\cos\alpha+i\sin\alpha$.

1) calculer le module et un argument du nombre complexe a^2-1.
2) On désigne par z' et z'' les nombres complexes qui sont racines de l'équation : $z^2-2az+1$.
   - a- montrer que z' et z'' sont les racines de l'équation

$(z-a)^2= a^2-1$.

b- Calculer le module et l'argument des nombres complexes (z'- a) et (z''- a).

c- En déduire z' et z'' sous forme algébrique.

3) dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (o,i,j) .on considère les points A,B,P,Met M' d'affixes respectives 1,-1,a,z' et z''.

a- montrer que P est le milieu de [MM'],que OM. OM' $=OA^2=OB^2$ et que (ox) est bissectrice (OM,OM').

b- déduire de 2-a que PB. PA= PM^2 et (MM') est bissectrice de (PA,PB).

EXERCICE 63:

θ est un réel de l'intervalle $[\Pi,-\Pi]$

1) a- résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation :

$z^2-2(1+\cos\theta)z + 2(1+\cos\theta)=0$.

b- écrire les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous la forme trigonométrique.

2) déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z_1 lorsque θ décrit $[-\Pi,\Pi]$.

Exercice 64 :

Soit dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation :

(I) $4z^4 + 4\cos\theta(1+\cos\theta)z^2+(1+\cos\theta)^2= 0$ Ou $\theta\in[0,\pi]$.

1) résoudre l'équation (I) pour $\theta = \pi$.

2) on suppose $\theta\in[0,\pi[$ et on pose $z^2=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)Z$ (II).

a- résoudre l'équation (II) obtenu d'inconnu Z. Donner la forme trigonométrique des solutions.

b-on déduire les solutions de (I) sous la forme trigonométrique.

EXERCICE N°65

Soit $\theta\in]0,\pi[$, on considère l'équation dans C $(E): z^3+4.z^2+(5-e^{2i\theta}).z-4.i.\sin\theta.e^{i\theta}=0$.

1) Prouver que $e^{i\theta}$ est une racine carrée complexe de $1+2.i.\sin\theta.e^{i\theta}$.
2) Montrer que (- 2) est une racine de (E).
3) Résoudre dans IC l'équation (E).
4) Le plan est mené d'un R.O.N$(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les point A, M_1 et M_2 d'affixes respectives -2, $z_1=-1+e^{i\theta}$ et $z_2=-1-e^{i\theta}$.
   a) Mettre sous forme exponentielle z_1 et $\frac{z_1}{z_2}$.
   b) Montrer que M_1 et M_2 sont symétrique par rapport à un point fixe I à préciser.
   c) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M_1 quand θ varie.
   d) En déduire Γ_2 l'ensemble des points M_2 quand θ varie.
   e) Construire Γ_1 et Γ_2.
5) Montrer que O M_1 A M_2 est un rectangle.
6) Déterminer la valeur de θ pour la quelle on obtient un carré.

EXRCICE N° 66

<u>**A.**</u> Pour tout $z\in IC$ on pose $f(z)=4z^3-2(1+2i)z^2+(1+2i)z-i$.

1) Montrer que l'équation $f(z)=0$ admet une solution dans IC imaginaire pure α.
2) Résoudre dans IC l'équation $f(z)=0$.

<u>**B.**</u> On pose $g(z)=2z^2-2(1-\cos x)z^2+1-\cos x$ avec $x\in]0,\pi[$. $g(z)=0$.

1) Résoudre dans IC l'équation $g(z)=0$.
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   On considère les point M' et M '' d'affixes respectives $z'=\frac{1}{2}(1-\cos x+i\sin x)$ et $z''=\frac{1}{2}(1-\cos x-i\sin x)$.

   a) Calculer $\left|z'-\frac{1}{2}\right|$ et $\left|z''-\frac{1}{2}\right|$.
   b) En déduire que M' et M'' appartiennent à un même cercle que l'on déterminera.
   c) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

d) On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2z'$ et $z_C = 2z''$. Déterminer les réels x pour que ABCO soit un parallélogramme.

EXERCICE N°67

Soit f l'application de C dans C définie par f(z) = $z^4 - \sqrt{2}\, z^3 - 4\sqrt{2}\, z - 16$

1- Montrer que l'équation f(z) = 0 admet deux solutions imaginaires pures
2- En déduire l'ensemble des solutions dans C de l'équation f(z) = 0
3- On note A, B, C et D les images des solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé Montrer que A, B, C et D sont les sommets d'un trapèze.

EXERCICE N° 68

Soit u un nombre complexe non nul tel que $Arg(u) \neq \frac{\pi}{4}$. Soit $(E): z^2 - u.z + \frac{1}{4}(u^2 + \bar{u}^2) = 0$.

1) Résoudre dans C l'équation (E). (on note z_1 et z_2 les solutions).

2) Montrer que $Arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ et $Arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

3) En déduire que O M_1M_2 est un triangle rectangle. (avec O est l'origine du repère et M_1 (z_1) et M_2 (z_2)).

4) Montrer que AM_1OM_2 est un rectangle. (avec A (u)).

EXERCICE N° 69

Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2i\bar{z} = 0$.

Soient O, A, B, C les images dans le plan complexe muni d'un RON $(O, \vec{u}, \vec{v})$ des solutions obtenus.

Montrer que ABC est équilatérale.

Exercice 70:

On considère dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation : (E) $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2 - 4i)z - 2i(1+m^2) = 0$ où m est un paramètre réel non nul.

1°) a) Monter que (E) admet une racine imaginaire pure Z_0 que l'on déterminera.

b) Calculer en fonction de m les autres racines.

2°) Dans le plan complexe apporté à un RON (O,Ū, V) on considère les points A ,B, M' et M'' d'affixes respectives 2i,(-2 -2i), (-1 –im)et (-1+im).

a) Montrer que AM' BM'' est parallélogramme.
b) Déterminer m pour que AM' et BM'' soit un rectangle.

Exercice n°71

1°) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation : $z^2-(2+i)z+2i = 0$.

2°) dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (o,u,v) on désigne par A et B les points d'affixe respective i et 2 . a tout point M du plan d'affixe z ($z \neq 2$) on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-i}{i(z-2)}$

1°) a- montrer que $|Z'| = \frac{AM}{BM}$

b- En déduire que lorsque M décrit la médiatrice du segment [AB],le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

2°)a- montrer que (u, OM')=(BM,AM)- $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$

b- montrer que si M appartient à la droite (AB) le point M' appartient à une droite que l'on déterminera .

Exercice n° 72

Soit z = $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5})$

1- Vérifier que $z^5 = 1$. En déduire que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

2- a- Exprimer z , z^2 , z^3 et z^4 sous forme trigonométrique

b- Démontrer que : $z + z^4 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $z^2 + z^3 = 2.\cos(\frac{4\pi}{5})$

3- Utiliser les résultat de 1 et 2 pour trouver une relation entre $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

4- Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice n° 73

On notera i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ .On considère la fonction polynôme P définie sur l'ensemble

C des nombres complexes par : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.
1° Calculer P(6) . Montrer que $P(z) = (z - 6)(z^2 - 6z + 12)$
2° Résoudre dans C l'équation P(z) = 0 .
Calculer le module et un argument de chaque solution .(On notera z_o , z_1 , z_2 les solutions ;z_1 étant celle dont la partie imaginaire est la plus grande .z_2 étant celle dont la partie imaginaire est la plus petite .)
3° Le plan est muni d'un repère ortho normal (o,i,j) .Soient N_o, N_1, N_2 les points du plan d'affixes respectives z_o , z_1 et z_2 .Placer ces points Quelle est la nature du quadrilatère $ON_oN_1N_2$? Justifier.

Exercice n° 74

Résoudre dans C l'équation : $z^2 - a(2+i)z + 2a^2 i = 0$, où a est un paramètre complexe.
On désigne par z' et z'' les solutions de cette équation.

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormées $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, N, M', M'' d'affixes respectives 1, a, z' et z''.
Déterminer l'ensemble des points N pour lesquels les points A, M' et M'' sont alignés.
Déterminer l'ensemble des points N pour lesquels on a : AM' = AM'' .

Exercice n° 75

θ est un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$

1-a) Déterminer le module et un argument des nombres complexe : $z_1 = 1 - e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{3i\theta}$.
b) En déduire le module et un argument du nombre complexe : $z_3 = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$
(on rappellera que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$)
2- Résoudre dans C l'équation :
E_θ : $z^2 - (2 + e^{2i\theta})z + 1 - e^{3i\theta} = 0$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice n° 76

Soit $S_n = \sin(\frac{\pi}{n}) + \sin(\frac{2\pi}{n}) + \dots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

Montrer que $S_n = \frac{1}{tg(\frac{\pi}{2n})}$. En déduire la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 77

Soit α un réel de l'intervalle]-π , π]
On pose u = 3.cos α – 5i sin α et v = 5.cos α – 3i sin α
4- Montrer que $v^2 - u^2$ est une constante que l'on précisera.
5- Soit l'équation (E) : $2z^2 + (3.\cos\alpha - 5i\sin\alpha)z - 2 = 0$
on note z' et z" les solutions de (E).
a- Sans calculer z' et z", montrer que Arg(z') + Arg(z") ≡ π [2π]
b- Résoudre dans C l'équation (E) et donner les solutions sous forme exponentielle.
6- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M' et M" d'affixes respectifs z' et z".
Trouver les valeurs de α pour lesquelles OM'M" est un triangle rectangle en O

Exercice n° 78

Soit $f(z) = z^3 - (1 - 2\sin\theta)z^2 + (1 - 2\sin\theta)z - 1$; avec $\theta \in]-\pi, \pi[$

1°/ a) Vérifier que f (1) = 0.
b) Résoudre alors l'équation (E).

2°/ Soient $z_1 = 1$, $z_2 = -\sin\theta + i\cos\theta$ et $z_3 = -\sin\theta - i\cos\theta$.
a) Déterminer le module et un argument de z_1 , z_2 et z_3 .
b) Montrer que $|z_2 - 1| = |z_3 - 1|$.

3°/ Soient dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .

a) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ en fonction de θ.

b) Déterminer θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

EXERCICE 79 :

Soit dans C l'équation (E) : $z^3 + \alpha z^2 - \overline{\alpha}\, z - 1 = 0$ où $\alpha \in C^*$.

1°/ a) Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de (E) alors : $z_0 . z_1 . z_2 = 0$.

b) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\dfrac{1}{\overline{z}}$ est aussi solution de (E).

c) En déduire que (E) possède au moins une solution de module 1.

2°/On suppose que $|z| = 1$.

a) Vérifier que $(-\alpha)$ est une solution de (E).

b) Soit θ un argument de α. Déterminer les autres solutions de (E)en fonction de θ.

3°/ Utiliser ce qui précède pour résoudre dans C l'équation :

$2 z^3 + (1 + i\sqrt{3}) z^2 - (1 - i\sqrt{3}) z - 2 = 0$

EXERCICE 80 :

Soit dans C l'équation : $z^4 - 4(1 + i) z^3 + 12 i z^2 + 8(1 - i) z - 2 = 0$.

1°/ Déterminer les nombres complexes a et b tels que : *(E)* $\Leftrightarrow (z^2 + 2i)(z^2 + az + b) = 0$.

2°/ Résoudre alors l'équation (E).

3°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B, C et D dont les affixes sont les solutions de (E) . Montrer que ABCD est un carré.

EXERCICE 81 :

Soit l'application f : P\{O} $\mapsto$ P / $M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$ telle que : $z' = \dfrac{z^2 - 4}{2z}$ pour $z \neq 0$

1°/ a) Démontrer que si $z \neq 2i$ on a : $\dfrac{z' + 2i}{z' - 2i} = \left(\dfrac{z + 2i}{z - 2i}\right)^2$

b) On note A et B les points d'affixes respectives 2i et (-2i).Justifier que : $(\widehat{\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})\ [2\pi]$ puis que $\dfrac{M'B}{M'A} = \dfrac{MB}{MA}$.

2°/ Soit I le point d'affixe : - 4 + 2 i .

a) Déterminer $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$ et $\dfrac{IA}{IB}$

b) Déterminer et construire l'ensemble E = { M $\in$ P/ $\dfrac{MB}{MA} = 2$}.

c) En utilisant ce qui précède, construire le point I' image de I par f.

EXERCICE 82 :

1°/ a) Résoudre dans C l'équation : $i z^2 - z + i = 0$.

b) Mettre les solutions sous formes trigonométriques .

2°/ On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,et on pose A et B les points d'affixes respectives i et – 2i.

Soit l'application : f : P $\longmapsto$ P

$M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$ telle que : $z' = \frac{2z - i}{iz+1}$

a) Déterminer l'ensemble E = { $M_{(z)}$ / f(M) = M}.

b) On pose z– i = $re^{i\theta}$ et z' = $r'e^{i\theta'}$ .Montrer que : (z'+2i) (z-i) = 1.Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ .

3°/ Soit I le point d'affixe : $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

a) Montrer que I est un point du cercle de centre A et de rayon 1.

b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{IA}$ et déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AI})$.

EXERCICE 83 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$ et M est le point d'affixe $z = \frac{e^{i\theta}}{1+\cos\theta}$.

1°/a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0,\pi\right[$ on a : $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = tg\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}tg^2\frac{\theta}{2}$.

b) En déduire que lorsque θ décrit $\left]0, \pi\right[$ le point M décrit une courbe (Γ) dont On donnera une équation.

2°/ Soit l'application f : P $\longmapsto$ P $M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$ telle que : $z' = \frac{1}{\bar{z}}$

a) Exprimer l'affixe z' du point M' en fonction de θ et déterminer sa forme exponentielle.

b) Soit a = $e^{i\theta}\cos\theta$ et A le point d'affixe a .Montrer que A appartient à un un cercle de centre I d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon R = $\frac{1}{2}$.

c) Montrer que A, M, M' et O sont alignés .

d) Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AM'}$ puis calculer AM' .Expliquer comment peut-on construire M' à partir de A.

EXERCICE 84 :

Soit f : $C^* \longmapsto C$ $z \longrightarrow z' = \frac{i+z}{\bar{z}}$

1°/ a) Calculer f ($\frac{-i}{2}$) et f (1 - $\frac{i}{2}$). f est-elle bijective ?

b) Montrer que : f (z) = 1 $\Leftrightarrow$ $\Im m(z) = \frac{1}{2}$.

2°/ a) Montrer que f (z) = z' $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = \overline{z\, z'} + i$ et que : $z\,(1 - z'\,\overline{z'}) = i\,(z' - 1)$.

b) En déduire que : $|z'| \neq 1$ alors z' admet un seul antécédent z par f

3°/ On note M et M' les points, du plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,d'affixes $z \in C^*$ et z' = f (z).

a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M lorsque M' décrit le cercle ξ de centre O et de rayon 2.

b) Vérifier que pour tout $z \in C^*$ on a : $z' - 1 = i\,(\frac{1+2\,\Im m(z)}{|z|^2})\,z$. En déduire que :

$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{IM}$ avec I est le point d'affixe 1.

c) Trouver alors une construction géométrique du point M à l'aide de M' $\in \xi$.

4°/ Résoudre dans C l'équation $(z + i)^4 = 16\,(\bar{z})^4$; (on pose $t = \dfrac{i+z}{\bar{z}}$)

EXERCICE 85 :

Soit f : P \ {O} $\mapsto$ P $\qquad$ $M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$ telle que : $z' = f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z}$

1°/ a) Comparer f(z) et $f(\dfrac{1}{z})$. f est-elle bijective ?

b) Résoudre dans C^* l'équation f (z) = z puis f (z) = 0.

c) Exprimer $f(e^{i\theta})$ en fonction de cos θ.En déduire les réels $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ tels que : $f(e^{i\theta}) = 1+i\sqrt{3}$.

2°/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,on pose A, M et M' les points d'affixes respectives (-1), z et f (z) = z ' et soit ξ le cercle de diamètre [OA] .

a) Montrer que : f (z) $\in$ IR $\Leftrightarrow$ $z = \bar{z}$ ou $z\bar{z} = 1$.

b) Montrer que : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow M \in \xi$ \{O} .

EXERCICE 86 :

1°/ Résoudre dans C l'équation : $|z-1|^2 + \bar{z} - 1 = 0$. Soit E l'ensemble des solutions .

2°/ Pour tout z $\in$ C\ E, on pose $f(z) = \dfrac{i z^2}{|z-1|^2 + \bar{z} - 1}$.

a) Montrer que : $f(z) = \dfrac{i z}{\bar{z} - 1}$.

b) Ecrire sous forme algébrique : f (2+ 3i) et $f(\dfrac{1}{2} + i y)$; y $\in$ IR.

3°/ Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

on note A, B et M les points d'affixes respectives : 1, - i et z et on pose M' le point d'affixe z' = f (z).

a) Montrer que : M $\in$ med [OA] $\Leftrightarrow$ M' = B.

b) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}})\ [2\pi]$. En déduire l'ensemble D des points M tels que O , M et M' sont alignés

4°/ On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

a) Trouver en fonction de θ le module et un argument de f(z).

b) Déterminer et construire l'ensemble des points $M_{(z)}$ tel que : OM = 1 et M' $\in \Delta$: y = x

EXERCICE 87 :

Soit f l'application de C\{2i} dans C définie par : $f(z) = \dfrac{2z - i}{z - 2i}$.

1°/Résoudre l'équation f (z) = z. On donnera les solutions z_1 et z_2 sous formes algébriques et sous formes trigonométriques.

2°/ Déterminer et construire l'ensemble suivant : E = {$M_{(z)}$ / f (z) est imaginaire pur }.

3°/ a) Montrer que : $|z|=1 \Leftrightarrow |f(z)|=1$.

b) En déduire l'ensemble F = {$M_{(z)}$ / f (z) =1 }. Construire F.

4°/ Soit φ : P $\longmapsto$ P $\qquad M_{(z)} \longrightarrow M'_{(z')}$ telle que : $z' = -\frac{3}{4}j^2 z + \frac{5}{4}$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de φ . Montrer que φ (F) = E.

EXERCICE 88 :

Le but de cette exercice est montrer, à l'aide des nombres complexes, qu'un triangle ABC dans lequel le centre O de son cercle circonscrit est aussi isobarycentre des points A, B et C ; est un triangle équilatéral. On désigne par P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,et on note j = $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1°/ a) Mettre j et j^2 sous forme algébrique.

b) Montrer que : $1 + j + j^2 = 0$ et que $\bar{j} = j^2$.

2°/ On cherche les nombres complexes tels que : $|z| = |1+z|$ (*).

a) Montrer que j satisfait au condition (*).

b) Montrer que : pour qu'un nombre complexe z =x + i y ;avec x et y sont des réels,

Satisfait à la condition (*) on a : $x = -\frac{1}{2}$. En déduire que j et $\bar{j}$ sont les seuls nombres complexes satisfaisant à (*) .

3°/ Soit A, B et C trois points du cercle de centre O et de rayon R . On suppose que O est l'iso barycentre de A, B et C ,(càd $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$). Soient a,b et c les affixes respectives de A, B et C et on pose : $p = \frac{b}{a}$ et $q = \frac{c}{a}$.

a) Montrer que : $|p| = |q| = 1$ et que : 1 + p + q = 0 .

b) Montrer, en utilisant 2°/ b) ,que l'on a soit p = j ou p = $\bar{j}$

c) Dans la suite on suppose que p = j.

d) Montrer que : $q = j^2 = \bar{j}$.

e) Montrer que : b – a = (j –1) a ; c – b = (j –1) b et c – a = (j –1) a. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice n° 89

Calculer $A_n = \sum_{k=1} C_n^{3k}$

On montrera que $A_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Exercice n° 90

Calculer $B_n = \prod_{k=1}^{k=n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$ $\qquad$ rep ($= \frac{n}{2^n}$)